Klausur WS 2016
Dienstag, 11. August 2020 09:45

Aufgabe 2

a) $O(f(n)) := \{ g(n) \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists c > 0\ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) \}$

z.z.: $\log_3(n^3 \cdot 3^n) \leq c \cdot n \quad \forall n \geq n_0$

$$\log_3(n^3 \cdot 3^n) = \log_3(n^3) + \log_3(3^n)$$
$$= 3\log_3(n) + n \underbrace{\log_3(3)}_{=1}$$
$$\leq 3 \cdot n + n = 4n$$

Ungleichung gilt also für $n_0 = 1$ und $c = 4$

b) $\sqrt[3]{n} \in \Theta(\sqrt{n})$

$\Leftrightarrow n^{1/3} \in \Theta(n^{1/2})$

Falsch! Führe $n^{1/3} \in \Omega(n^{1/2})$ zum ↯.

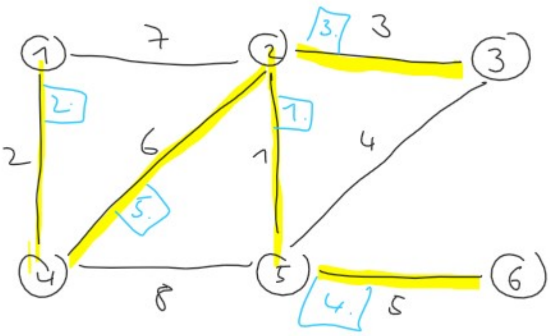
Sei $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$. Ann.: $\forall n \geq n_0$ gilt:

$$n^{1/3} \geq c \cdot n^{1/2} \quad | \, : n^{1/3}, \, : c$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} \geq n^{1/2 - 1/3} = n^{1/6} \quad | \, (\,)^6$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{c}\right)^6}_{\text{Konstante}} \geq n \quad (\forall n \geq n_0) \quad ↯$$

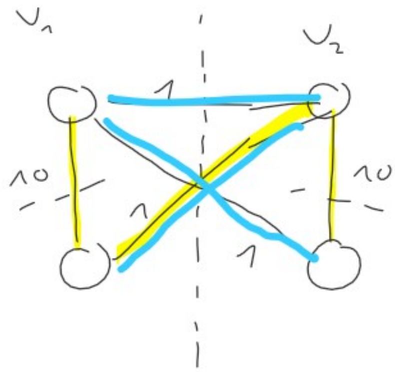
c) siehe Übung 11

Aufgabe 3

a)



b)



T

$w(T) = 21$

T'

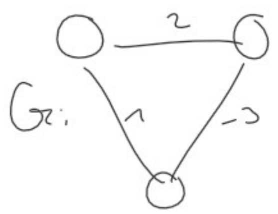
$w(T') = 3$

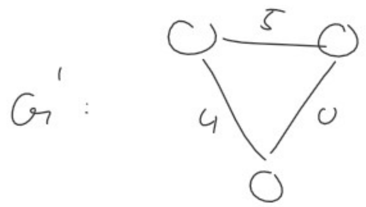
Ausgabe T kein MST da $w(T) > w(T')$

c) $G = (V, E, w)$

Sei $G' := (V, E, w')$

mit $w'(e) = w(e) + |w_{min}|$ → w_{min} ist min. Kantengewicht in G





Prim und Kruskal agieren auf G' genau wie auf G (machen die gleiche Ausgabe von Kanten)

Sei T die Ausgabe von Prim / Kruskal auf G'.

Dann ist $w'(T)$ minimal weil G' nur positive Kantengewichte hat.

$w(T) = w'(T) - \underline{(n-1)|w_{min}|}$

$\Rightarrow w(T)$ minimal

Aufgabe 6 $n := len(A)$

a) Verbal: myst gibt true zurück gdw. die Distanz ($\hat{=}$ Betrag der Differenz) zwischen zwei Zahlen im Array (bis auf A[0]) den selben Rest mod 10 haben wie ein drittes Element in A[1..n-1].

Formal: myst gibt true zurück gdw.

$\exists i, j \in \{1, \dots, n-1\}, j < i \; \exists k \in \{1, \dots, n-1\}:$

$|A[j] - A[i]| = A[k] \mod 10$

b) $\Theta(n^3)$. Begründung: 3 verschachtelte Schleifen die jeweils (fast) n Durchläufe haben. Im inneren werden nur Operationen mit konstanter Laufzeit ausgeführt.

c) Lösung mittels Hashing:

1.) Erstelle Hashtabelle H der Größe n^2 (Kollisionsauflösung mit Chaining)

2.) Füge alle Werte $|A[i] - A[j]| \mod 10$ $i,j \in \{1, \dots, n-1\}$ in H ein

3.) Überprüfe $A[k] \mod 10$ eine Kollision erzeugt für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\underbrace{O(n^2)}_{1.)} + \underbrace{O(n^2)}_{2.)} + \underbrace{O(n)}_{3.)} = O(n^2) \text{ (erwartet)}$$

Lösung mit Lookups:

1.) Erstelle Array B der Größe 10

2.) Iterieren durch alle Tupel $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ und setze $B[|A[j] - A[i]| \mod 10] = \text{True}$

3.) Für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ überprüfe $B[A[k] \mod 10] == \text{True} \Rightarrow$ return True, falls ja.

4.) return False

$$\underbrace{O(n^2)}_{2.)} + \underbrace{O(n)}_{3.)} = O(n^2)$$

Aufgabe 8

```
sort(L)
    La,...,Le ← empty Lists
    currentElem ← L.first
    while currentElem ≠ None
        s ← currentElem.data
        If first symbol of s is a
            La.append(s)
        If first symbol of s is b
            Lb.append(s)
        ⋮
        If first symbol —"— e
            Le.append(s)

    return La + Lb + ... + Le
```

Laufzeit: $O(n)$

Korrektheit: Da Bucketsort stabil ist.
Dh. strings mit gleichem Präfix haben die selbe relative Sortierung innerhalb $L_a, \dots, L_e$.