



Algorithmen und Datenstrukturen

Sommersemester 2022

Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 31. Mai, 2022, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Ungeeignete Hashfunktionen (10 Punkte)

Sei m die Größe einer Hashtabelle und $M \gg m$ der größte mögliche Schlüssel der Datenelemente, die wir in dieser Hashtabelle speichern möchten. Die folgenden “Hashfunktionen” sind aus unterschiedlichen Gründen schlecht gewählt. Erläutern sie für jede Funktion warum das so ist.

(a) $h : x \mapsto \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \bmod m$ (1,5 Punkte)

(b) $h : x \mapsto (2x + 1) \bmod m$ für ein gerades m . (1,5 Punkte)

(c) $h : x \mapsto (x \bmod m) + \lfloor \frac{m}{x+1} \rfloor$ (1,5 Punkte)

(d) Bei jeder Berechnung des Hashwerts von x wählt man für $h(x)$ eine gleichverteilt zufällige Zahl aus $\{0, \dots, m-1\}$ (1,5 Punkte)

(e) $h : x \mapsto \lfloor \frac{M}{x \cdot p \bmod M} \rfloor \bmod m$, wobei p prim und $\frac{M}{2} < p < M$ (2 Punkte)

(f) Für eine Menge “guter” Hashfunktionen h_1, \dots, h_ℓ mit $\ell \in \Theta(\log m)$ berechnen wir erst $h_1(x)$, dann $h_2(h_1(x))$ etc. bis $h_\ell(h_{\ell-1}(\dots h_1(x)) \dots)$.

Die Funktion lautet also $h : k \mapsto h_\ell(h_{\ell-1}(\dots h_1(x)) \dots)$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: (Keine) Familien Universeller Hashfunktionen (10 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{S} = \{0, \dots, M-1\}$. Wir definieren $\mathcal{H}_1 := \{h : x \mapsto a \cdot x^2 \bmod m \mid a \in \mathcal{S}\}$. Zeigen Sie, dass \mathcal{H}_1 nicht c -universell ist, für konst. $c \geq 1$ (d.h., c ist fest und unabhängig von m). (4 Punkte)

(b) Sei nun m prim und $k = \lfloor \log_m M \rfloor$. Wir betrachten Schlüssel $x \in \mathcal{S}$ in ihrer Darstellung zur Basis m , d.h., $x = \sum_{i=0}^k x_i m^i$. Betrachten Sie die in der Vorlesung (Woche 5, Folie 15) vorgestellte Funktionsmenge

$$\mathcal{H}_2 := \left\{ h : x \mapsto \sum_{i=0}^k a_i x_i \bmod m \mid a_i \in \{0, \dots, m-1\} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{H}_2 1-universell ist. (6 Punkte)

Hinweis: Zwei Schlüssel $x \neq y$ müssen sich in einer Stelle $x_j \neq y_j$ ihrer Basis m -Darstellung unterscheiden.