



Algorithmen und Datenstrukturen

Sommersemester 2022

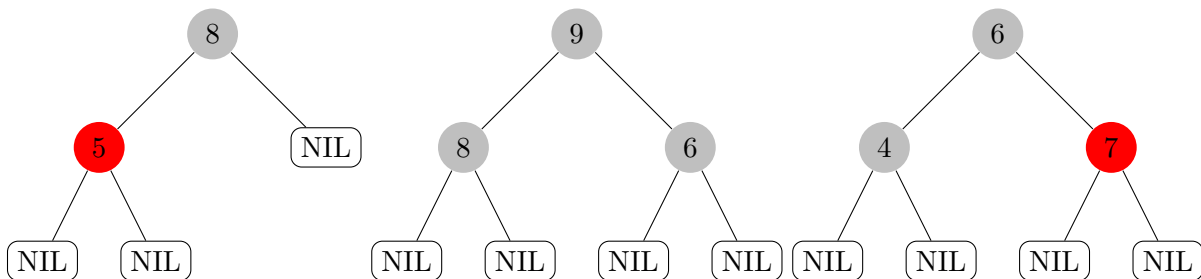
Übungsblatt 7

Abgabe: Dienstag, 21. Juni, 2022, 10:00 Uhr

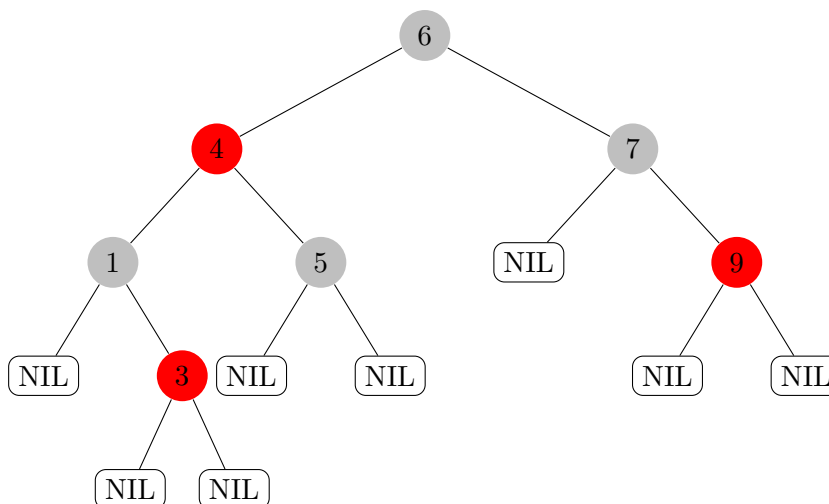
Aufgabe 1: Rot-Schwarz Bäume

(10 Punkte)

- (a) Entscheiden Sie für jeden der folgenden Bäume, ob es sich um einen Rot-Schwarz Baum handelt und falls nicht, welche Eigenschaft verletzt ist: *(3 Punkte)*



- (b) Führen Sie auf folgendem Rot-Schwarz Baum zuerst die Operation `insert(8)` und danach `delete(5)` aus. Zeichnen Sie den resultierenden Baum. Dokumentieren Sie Ihre Zwischenschritte. *(7 Punkte)*



Aufgabe 2: AVL-Bäume¹

(10 Punkte)

Ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum, für den folgende Zusatzeigenschaft gilt: Für jeden Knoten v im Baum ist die Differenz der Höhen des linken und des rechten Teilbaumes von v höchstens 1.

¹AVL-Bäume wurden nicht in der Vorlesung behandelt. Sie benötigen für die Aufgabe nichts Weiteres als die hier gegebene Definition.

- (a) Beweisen Sie *induktiv*, dass ein AVL-Baum der Tiefe d bis zur Tiefe $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ voll besetzt ist. (3 Punkte)
Bemerkung: Ein Baum ist zur Tiefe d' voll besetzt wenn er für alle $x \leq d'$ genau 2^x Knoten mit Tiefe x hat (d.h., Schicht x des Baumes hat die maximale Anzahl Knoten).
- (b) Geben Sie die minimale Anzahl von Knoten eines AVL-Baumes in Abhängigkeit von d als Rekursionsgleichung an und begründen Sie. (3 Punkte)
Hinweis: Drücken Sie die minimale Anzahl der Knoten eines AVL-Baumes der Tiefe d rekursiv mittels der min. Anzahl Knoten niedrigerer AVL-Bäume aus (mit Basisfällen für Tiefe 0 bzw. 1).
- (c) Zeigen Sie dass ein AVL-Baum mit n Knoten Tiefe $\mathcal{O}(\log n)$ hat. (4 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie dazu entweder Aussage a) oder Aussage b) mit dem Hinweis dass für die Folge definiert durch $F_0 = 1, F_1 = 2, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, i \geq 2$ gilt dass $F_{i+2} \geq 2F_i$.